Conferinţa Internaţională de Matematică „Tiberiu Popoviciu” 2013

Probleme de geometrie plană

în concursuri și olimpiade

Papp Tamas-Peter

Clasa a X-a A

Colegiul Naţional „Moise Nicoară” Arad

Coordonator: Prof. Potocean Octavia

Cuprins

Probleme pag.3

Bibliografia pag.12

Probleme

1. Se consideră numerele complexe distincte a, b, c, d. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:
2. Pentru orice z C are loc |z-a|+|z-b|≥|z-c|+|z-d|;
3. Există t (0,1) astfel încât c=ta+(1-t)b și d=(1-t)a+tb.

Demonstrație:

P

B

A C D

Fie P(z), A(a), B(b), C(c), D(d).

i)ii) 2ABAC+BC+AD+BD (1)

Dar, din inegalitatea triunghiului, 2ABAC+BC+AD+BD (2)

AC+BC+AD+BD2ABAC+BC+AD+BDavem egalitate în ambii membrii, deci

AB=AC+CB și AB=AD+DB, adică C,D (AB), și AB=AC+AD, adică AC+CD+BD= =AC+AC+CD BD=AC (3).

ii)c=ta+(1-t)b AC=|c-a|=|(1-t)(b-a)|=(1-t)AB și d=(1-t)a+tb, de unde BD=(1-t)AB AC=BD i)ii)

ii)i) Din Inegalitatea lui Ptolemeu pentru patrulaterele (degenerate) PACD si PCDB, avem:

(PA+PB)CDPC(AD-BD)+PD(BC-AC)

Deoarec ii)AC=BD, avem (PA+PB)CD(PC+PD)CD,

adică PA+PBPC+PD, echivalent cu i)ii)i)

Pe baza cazurilor analizate, concluzionam că i)ii), q.e.d.

Obs.: Cazul analizat este A-C-D-B, cazul A-D-C-B este analog prin simetrie.

1. Fie ABCD un paralelogram şi O un punct în interiorul său astfel încât m() +m()=180°. Să se arate că m()=m().

Demonstraţie:

D C

O

A B

O

Considerăm translaţia de vector O→O’ şi C→B (deoarece ABCD paralelogram).

∆AO’B≡∆DOC m()=m()m()=180°-m() AOBO’ inscriptibil.

∆O’AB≡∆ODC m()=m() dar m()=m() m()= m()

dar m()= m() (alterne interne)

m()=m() q.e.d.

1. Fie şi două cercuri şi l o dreaptă în plan. Construiţi dreapta paralelă cu l care să intersecteze cele două cercuri şi să formeze coarde egale.

Rezolvare:

Fie , proiecţiile punctelor centrele cercurilor şi , pe dreapta l. Fie imaginea lui printr-o translaţie de vector . Dreapta căutată este dreapta d, ce trece prin intersecţia lui cu .

*l’*

*d*

*l*

1. Constriuţi patrulaterul ABCD, finnd date unghiurile sale şi laturile AB=a şi CD=b.

Rezolvare:

A’

A

a

b b

B C D’

Presupunem ABCD construit. Fie imaginea lui D prin translaţia de vector . În ∆AB cunoaştem AB, B şi . Pentru construcţie, fie BC’ construit arbitrar şi B’ şi BA’ astfel încât m()= 180°- m(), m()= m().

Pe dreptele BA’ şi luăm segmentele BA=a, B=b şi fie AD’ astfel încât = Punctul D se obţine intersectând AD’ cu paralela prin la BC’. Punctul C se obţine intersectând BC’ cu paralela prin D la .

1. Fie A, B două puncte situate de aceeaşi parte a dreptei d. Să se afle poziţia punctului M pe d a.î. AM+MB să fie minimă.

A

B

M M’ d

A’

Rezolvare:

Fie M’ oarecare pe dreapta d şi A’ simetricul lui A faţă de d. Atunci AM’+M’B=A’M’+M’B. Această sumă este minimă dacă A, M’ şi B sunt coliniare, pentru că A’M’+M’B≥A’B. În concluzie, punctul M se află la intersecţia dintre d şi A’B.

1. Fie P mijlocul laturii AB a patrulaterului convex ABCD. Dacă aria triunghiuui PDC este egală cu jumătate din aria lui ABCD, să se arate că BC||AD.

Demonstrație:

D

A

P

B C

D’

Fie D’ simetricul lui D faţă de P. Avem:

= = =+ şi BD’||AD.

P-mijlocul lui AB == B aparţine lui D’C, deci dreapta

BD’ este aceeaşi cu dreapta BC BC||AD, q.e.d.

1. Să se arate că triunghiul ortic (format de înălţimi) este cel de perimetru minim dintre triunghiurile înscrise într-un triunghhi ABC dat.

Demonstrație:

A

C’ N

M

B’

B C

A’

Fie ∆A’B’C’ un triunghi oarecare, înscris în ∆ABC. Fie M,N simetricele punctului A’ faţă de dreptele AB respectiv AC. Deci, =A’B’+B’C’+C’A’ = NB’+C’B’+C’M, minim dacă N, B’, C’, M-coliniare, deci le putem considera coliniare =MN

AM=AA’=AN (din simetrie); m()=2m() şi m()=2m() (tot din simetrie) m()=2m().

MN2=AM2+AN2-2AM∙ANcos2A=2AA’2-2AA’2cos2A=AA’2∙(1-cos2A) PA’B’C’ este minim dacă AA’ este minim, deci AA’│ BC.

Procedând în mod similar şi pentru punctele B’ şi C’, obţinem că BB’ şi CC’ sunt de asemenea înălţimi în ∆ABC ∆A’B’C’ este triunghiul ortic al ∆ABC, q.e.d.

1. Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct în interiorul său, astfel încât MA=3, MB=4, MC=5. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

B’ A

M’

3

3 3

M

5

4 5

B C

Considerăm rotaţia de 60° în jurul lui A, în sens orar.Triunghiul ABC trece în

triunghiul ABB’, M trece în punctul M’ se formează ∆MAM’ echilateral.

Triunghiul MBM’ este dreptunghic în M (din reciproca teoremei lui Pitagora)m()=90°+60°=150°. Din teorema Cosinusului în ∆MAB aflăm latura AB= AABC =.

1. Pe laturile BC şi CD ale pătratului ABCD fie punctele M, K a.î. m= m. demonstraţi că BM+KD=AK.

Demonstraţie:

A B

M

M’ D K C

Considerăm rotaţia de centru A, unghi 90° şi sens orar, ce duce pe B în D, pe M în M’.

∆BMA≡∆DM’A şi BM=M’D

= == ∆KAM’ isoscel AK=KM’ AK=KD+DM’= =KD+BM, q.e.d.

1. Pe laturile AB, BC ale triunghiului echilateral ABC se iau punctele M şi N astfel încât MN||AC. Fie E mijlocul segmentului AN, D centrul de greutate al triunghiului BMN. Aflaţi valorile unghiurilor triunghiului CDE.

Demonstrație:

A

M’

D’

M N’

E

D

B C

N

Considerăm rotaţia de 60° în jurul lui C, în sens orar, ce duce punctele M, N şi D în M’, N’ şi N’. AMNN’ este paralelogram (se demonstrează uşor), deci E este centrul său de simetrie (mijlocul unei diagonale).

Considerând simetria faţă de E, triunghiul BMN trece în triunghiul M’N’A, şi astfel D trece în D’ (deoarece D’ centrul de greutate al triunghiului M’N’A).

E este mijlocul lui DD’ şi ∆CDD’ echilateral măsurile unghiurilor triunghiului CDE sunt de 30°, 60°, respectiv 90°.

1. Fie AA1, BB1, CC1 medianele ∆ABC, concurente în G, şi P un punct arbitrar. Notăm cu la, lb, lc, paralelele la PA1, PB1, PC1 din A, B şi C. Să se arate că:
2. la, lb, lc sunt concurente într-un punct Q
3. G aparţine lui PQ şi =

Demonstraţie:

lb A

lc

Q

C1  B1

la G P

B A1 C

G-centrul de greutate al ∆ABC = ==2

Considerăm omotetia de centru G şi coeficient -2 dreptele PA1, PB1, PC1 se transformă în dreptele la, lb, lc şi Q este imaginea lui P prin omotetie, adică la, lb, lc sunt concurente în Q şi G aparţine lui PQ, cu =, q.e.d.

1. Fie trapezul ABCD, cu AB||CD. Un punct P de pe BC, diferit de vârfurile segmentului, se uneşte cu D şi M, unde M-mijlocul lui AB. Fie PD∩AB=, PM∩AC=, DQ∩AB=. Să se arate că M este mijlocul lui XY.

Demonstraţie:

Considerăm omotetiile de centre Q şi P a.î. (A)=C, (C)=B.

D C

Q

A Y M X B

P

Compunerea HP○HQ(A)= HP(HQ(A))=Hp(C)=B transformă pe A în B, şi lasă punctul M fixat. M-mijlocul lui AB HP○HQ=SM, adică cele două omotetii, compuse, formează o simetrie faţă de M.

(D)=X şi (Y)=D (se deduce uşor din Teorema lui Thales) SM(Y)= (HP○HQ)(Y)= HP(HQ(Y))=HP(D)=X M-mijlocul lui XY, q.e.d.

1. Fie I punctul de intersecţie a diagonaleleor patrulaterului convex ABCD, iar A’, B’, C’, D’ mijloacele laturilor sale. Paralelele prin vârfurile A,C respectiv B, D la dreptele BD şi AC, delimitează un paralelogram MNPQ al cărui centru îl notăm cu J. Centrul paralelogramului A’B’C’D’ îl notăm cu K. Demonstraţi că I, J, sunt coliniare.

Demonstraţie:

M B N

A’ B’

A J K

I C

D’ C’

Q D P

IAMB – paralelogram (laturile opuse sunt paralele) A’ este mijlocul lui IM.

Analog, B’ este mijlocul lui IN, C’ este mijlocul lui IP şi D’ este mijlocul lui IQ. Astfel, deducem că A’B’C’D’ este omoteticul lui MNPQ faţă de I, cu raportul , deci şi K este omoteticul lui J prin omotetia de centru I şi raport .

I, J, K sunt coliniare, q.e.d.

1. Cercurile Ω și ω sunt tangente interior într-un punct P. O coarda AB este tangentă la ω într-un punct C. PC Ω={Q}, tangentele din Q la ω intersectează Ω în R respectiv S.

I, X și S sunt centrele cercurilor înscrise triunghiurilor ABP, ARB, ASB. Să se arate că +=90°.

Demonstraţie:

O omotetie de centru P ce duce ω în Ω va duce și C în Q, și analog duce AB în tangenta la Ω în Q. Această tangentă este deci paralelă cu AB, și deci Q este mijlocul arcului AB. Acest lucru înseamnă că I, X, Y sunt pe PQ, RQ, SQ.

Știm că pentru orice triunghi KLM, mijlocul arcului KL al cercului circumscris, ce nu conține pe M, este echidistant față de I (c. c. înscris), K și L. Aplicăm acest lucru triunghiurilor APB, ARB, ASB, obținând QA=QB=QX=QY=QI.

Q este mijlocul lui AB, deci = = . QACQPA și QCQP==. QX este tangent la ω, deci X este punctul de tangență al QR la ω și la fel pentru Y și QS.

Din triunghiurile isoscele QXI și QYI obținem ==90°-/2 și ==90°-/2. Considerăm O centrul ω +=180°-/2=180°-(180°-)/2=90°+.

Deci, +=-=90°+-=90°, q.e.d.

P

R S

ω

Ω X I Y B

C

A

Q

Bibliografie:

1. Andrica D., Magdaş Camelia, Jecan E.-„Geometrie: clasele IX-X pentru grupele de excelenţă”, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010
2. Vornicu V.-„Olimpiada de Matematică de la provocare la experienţă”, Editura Gil, Zalău, 2003
3. Concursul Interjudeţean de Matematică „Traian Lalescu” 2012
4. Subiecte ONM 2013
5. Subiecte proba baraj seniori 2013